Numérique

L'algèbre de bool

Les portes logiques

Le théorème de "de Morgan"

Table de Karnaugh

s.bolay, Automaticiens 4G, CFPs-EMVs, 2007

Algèbre de Boole

$\overline{0} = 1$

$\overline{1} = 0$

$\overline{\overline{A}} = A$

$A + 0 = A$

$A + 1 = 1$

$A + A = A$

$A + \overline{A} = 1$

$A \bullet 0 = 0$

$A \bullet 1 = A$

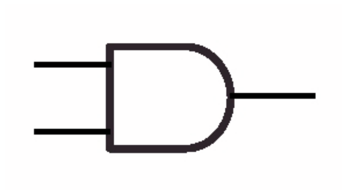
$A \bullet A = A$

$A \bullet \overline{A} = 0$

Porte logique
“ET (AND)”

X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

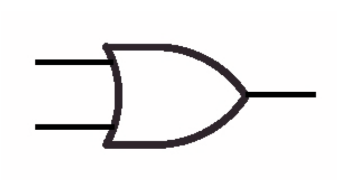
$$Y = X \bullet Y$$



Porte logique
“OU (OR)”

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$Y = X + Y$$



Porte logique
“OU Exclusive (XOR)”

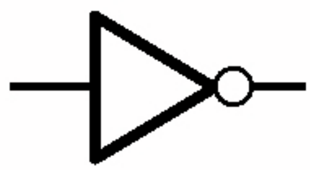
X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Y = X \oplus Y$$

Porte logique
“Inverseur (Inverter)”

X	Z
0	1
1	0

$$Y = \overline{X}$$



Porte logique “NON-ET (NAND)”

X	Y	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$Y = \overline{X \bullet Y}$$

Porte logique “NON-OU (NOR)”

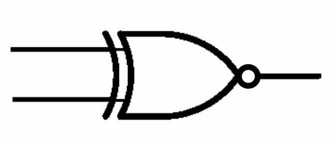
X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$Y = \overline{X + Y}$$

Porte logique “NON-OU Exclusive (XNOR)”

X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Y = \overline{X \oplus Y}$$



Théorème de “de Morgan”

$$\overline{A + B + C + ... + N} = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet ... \bullet \overline{N}$$

$$\overline{A \bullet B \bullet C \bullet ... \bullet N} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + ... + \overline{N}$$

$A \bullet B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ ou $\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$

$A \bullet \overline{B} = \overline{\overline{A} + B}$ ou $\overline{A \bullet \overline{B}} = \overline{A} + B$

$\overline{A} \bullet B = \overline{A + \overline{B}}$ ou $\overline{\overline{A} \bullet B} = A + \overline{B}$

$\overline{A} \bullet \overline{B} = \overline{A + B}$ ou $\overline{\overline{A} \bullet \overline{B}} = A + B$

Table de Karnaugh

B \ A	0	1
0	m_0	m_2
1	m_1	m_3

Table de Karnaugh

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Y \ X	0	1
0	0	1
1	1	1

Table de Karnaugh

$\overline{\overline{X} \bullet \overline{Y}}$

$X + Y$

Y \ X	0	1
0	0	1
1	1	1

Table de Karnaugh

B \ A	0	1
0	m_0	m_2
1	m_1	m_3

Tableau à 2 variables

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

Tableau à 3 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

Tableau à 4 variables

- Bien que les diagrammes de Karnaugh soient applicables à des problèmes ayant un nombre quelconque de variables d'entrée, ils ne sont plus d'une grande utilité en pratique quand le nombre de variable dépasse six.
- Dans cette théorie, nous n'aborderons pas de problèmes ayant plus de quatre entrées, puisque ceux ayant cinq et six entrées sont des problèmes d'envergure qu'il est préférable de traiter avec un programme informatique.

Table de Karnaugh

Les Réunions: Il est possible de simplifier l'expression de la sortie Z en groupant les "1" qui sont voisins. Ceci est le principe de réunion.

Les réunions existent en groupe de:

- 2 (doublets ou paires)
- 4 (quartets)
- 8 (octets)

Si l'ensemble des cases du tableau sont à "1", l'on peut donc en théorie crée un group de 16. Mais cette condition n'est que de peut d'utilité puisque la sortie Z ne correspond plus à une expression des entrées, mais vaut simplement "1".

Y \ X	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Les conditions "indifférentes"

- Certains circuits logiques peuvent être conçus pour que certaines conditions d'entrées ne correspondent à <u>aucun niveau de sortie particulier</u>, principalement parce que ces conditions ne doivent <u>jamais survenir</u>. En d'autres mots, il existe certaines combinaisons des niveaux d'entrée pour lesquels il nous importe peu que la sortie soit HAUTE ou BASSE.
- Dans une table de Karnaugh cette condition peut donc être choisie comme étant un "1" ou un "0" logique afin d'obtenir la meilleure simplification.

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**x**
1	0	0	**x**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Table de Karnaugh

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	**x**
1	0	0	**x**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

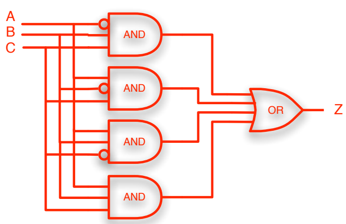
AB \ C	0	1
00	0	0
01	0	**x**
11	1	1
10	**x**	1

$$Z = A$$

Exemple d'application

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Z = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$



C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

$$Z = BC + A\bar{C}$$